Samenvatting

-Wiskunde voor Economen-

Inhoudsopgave

Week 1 3
- Inleiding tot functies 3
- Differentiëren 5

Week 2 8
- Optimaliseren van functies met één variabele 8

Week 3 9
- Integreren 9

Week 4 12
- Bivariate functies 12
- Partieel en impliciet differentiëren 14
- Financiële rekenkunde 15

Week 5 15
- Optimaliseren van functies met meerdere variabelen 15

Week 6 17
- Optimaliseren met de substitutiemethode 17
- Optimaliseren met de methode van Lagrange 18

Week 7 19
- Introductie matrices en stelsels lineaire vergelijkingen 19
- Inverse matrices 21
- Cramer’s rule 22
- Determinant van [3, 3] matrices 22

Disclaimer 23

Week 1

Inleiding tot functies

In de economie gebruiken we **functies** om relaties tussen verschillende economische variabelen kort en simpel weer te geven.

In de functie $y = f(x)$, is *x* de variabele die in de functie wordt ingevuld, ofwel de inputvariabele. De functie zal precies één resultaat geven voor *y*, de outputvariabele.

Deze inputvariabelen worden ook wel **onafhankelijke variabelen** genoemd, outputvariabelen hangen af van de inputvariabelen en zijn daarom **afhankelijke variabelen**.

De verzameling van alle mogelijke waardes van de onafhankelijke variabele is het **domein** van een functie. De verzameling van alle mogelijke waardes van de functie (waardes van de afhankelijke variabele) noemen we het **bereik** van een functie.

Het is mogelijk om in functies variabelen om te wisselen, om zo de **inverse functie** te achterhalen. Neem de volgende functie bijvoorbeeld: $y = f(x) = 3x + 2$. De inverse functie f^{-1} is te berekenen door van de onafhankelijke variabele een afhankelijke te maken en andersom. *X* en *y* worden eigenlijk dus omgewisseld.
De inverse functie f^{-1} wordt dan $x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$. Als laatste verwissel je de onbekenden en krijg je: $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\,x - \frac{2}{3}$

$y = 3x + 2$, is een voorbeeld van een **lineaire functie**. Zo'n soort functie heeft de grafiek van een rechte lijn. Lineaire functies hebben de vorm $y = ax + b$, waarbij *a* en *b* constanten zijn. **Lineaire vergelijkingen** zijn hieraan gerelateerd en stellen ons in staat om uit te rekenen waar de functie de x-as snijdt. Dit is waar $y = 0$, ofwel, bij welke *x* is $3x + 2$ gelijk aan 0? Deze waarde van *x* is de **oplossing** van deze vergelijking.

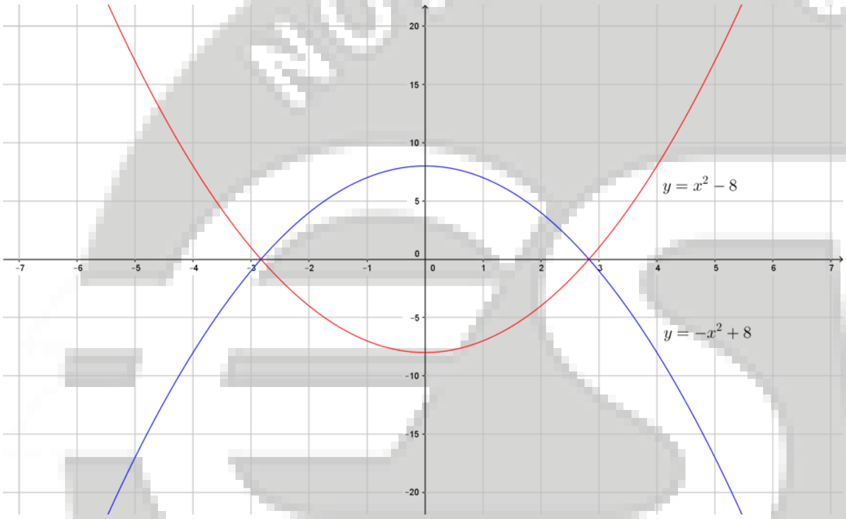
Hiervan uit kunnen we ook kijken naar het oplossen van meer dan één lineaire vergelijking tegelijkertijd, ofwel een **stelsel van vergelijkingen**. Een voorbeeld:
Neem het stelsel:
$$\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$$
De eerste stap is om één van de variabelen vrij te maken van de rest van de vergelijking. Zo gaat dat met de variabele *x* in de eerste vergelijking:
$2x = 20 - 4y$
$x = 10 - 2y$
Vervolgens kunnen we *x* in de tweede vergelijking substitueren met 10-2y:
$3(10 - 2y) - 2y = 14$
$30 - 8y = 14$
$-8y = -16$
$y = 2$
Als *y* gelijk is aan 2, en *x* gelijk is aan 10-2y, kunnen we nu voor de variabele *y* het getal 2 invullen om zo de oplossing voor *x* te achterhalen:
$x = 10 - 2(2)$
$x = 10 - 4$

$x = 6$
De oplossing van dit stelsel van vergelijkingen is dus *x*=6 en *y*=2

Naast lineaire functies zijn er ook andere typen functies, zoals de **kwadratische functie**. Deze heeft de standaardvorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarbij a, b, en c constanten zijn

De grafiek behorende bij zo'n functie heet een **parabool**.

Wanneer a>0 dan spreken we van een **dalparabool** en bij a<0 van een **bergparabool**.
De betekenis van deze namen wordt duidelijk uit onderstaande grafiek van de dalparabool (rood) en de bergparabool (blauw).



Om te weten te komen wat de nulpunten van een kwadratische functie zijn, moeten we de snijpunten van de parabool met de x-as zien te vinden (ofwel f(x) gelijkstellen aan 0), net als bij een lineaire functie. Dit kunnen we op een aantal manieren doen:

- Abc-formule
- Ontbinden in factoren

Allereerst de **abc-formule**:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ kan herleid worden tot $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($\pm$ geeft aan dat de abc-formule altijd twee keer uitgewerkt dient te worden, met een + of een – op de plek van $\pm$ teken).
$b^2 - 4ac$ wordt hierbij de **discriminant** genoemd, afgekort met de letter D. Aan D is af te lezen hoeveel oplossingen zo'n kwadratische vergelijking heeft.
Als D<0, dan zijn er geen oplossingen.
Als D=0, dan is er dus maar één oplossing: $x = -\frac{b}{2a}$
Als D>0, dan zijn er twee oplossingen.

Daarnaast is het mogelijk om een vergelijking op te lossen door te **ontbinden in factoren**. Dit kan ook weer op meerdere manieren:

1. De gemeenschappelijke factor buiten haakjes halen
In de vergelijking $x^2 + 3x = 0$ is de gemeenschappelijke factor *x*. Als we *x* buiten haakjes halen krijgen we:
$x(x+3) = 0$
Hieruit kan je concluderen dat *x* ofwel gelijk is aan 0, ofwel gelijk is aan
$x + 3 = 0$
$x = -3.$
2. De product-som methode
Met deze methode kan de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met *a*=1herleid worden tot $(x+y)(x+z) = 0$. Hierbij moet *y*+*z* gelijk zijn aan b en *y***z* gelijk zijn aan c.
$x^2 + 8x + 12 = 0$ wordt dus $(x+6)(x+2) = 0$. Hieruit kan je concluderen dat x+6=0 ofwel x+2=0, wat geeft x = -6 of x = -2.

Bij het introduceren van dit soort functies met machten erin is het alvast handig om alle regels te noemen bij het rekenen met machten:

- $(x^a)^b = x^{a*b}$
- $(x*y)^a = x^a * y^a$
- $x^a * x^b = x^{a+b}$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
- $x^0 = 1$

Differentiëren

In de economie kan het handig zijn om te weten wat het maximum of het minimum van een functie is. Zulke punten kunnen berekend worden door een functie te **differentiëren**. Als je een functie differentieert bepaal je uiteindelijk de **eerste afgeleide**. Met differentiëren kan je bijvoorbeeld de maximale winst of de minimale kosten uitrekenen. Om functies te kunnen differentiëren zijn er een aantal regels die gebruikt moeten worden.

De basisregel geldt voor een functie van de vorm $y = a(x)^n$.
De afgeleide hiervan is $y' = an(x)^{n-1}$.
Eventuele constanten in functies die je differentieert zullen wegvallen in de afgeleide functie. $y = 2x^2 + 4x + 6$ differentiëren geeft hierom $\frac{dy}{dx} = 2 * 2x^{2-1} + 1 * 4 * x^0$ → $\frac{dy}{dx} = 4x + 4$

($x^0 = 1$, hierom komt valt de x^0 weg in de afgeleide. $\frac{dy}{dx}$ is de notatie die wordt gebruikt om aan te geven dat de afgeleide van de functie *y* wordt berekend met de variabele *x* erin (y' wordt ook gebruikt).

Om erachter te komen waar het maximum of minimum van de functie *y* zou kunnen liggen, moeten we de vergelijking oplossen van $\frac{dy}{dx}$, ofwel de afgeleide, = 0. De afgeleide geeft namelijk de helling van de functie aan in een bepaald punt op de functie. In een maximum of minimum is de helling gelijk aan 0.

In dit geval krijgen we dus $4x + 4 = 0$.
Bij *x*=-1 is hier sprake van een minimum of maximum (immers $4x = -4 \rightarrow x = -1$).
Om de *y*-coördinaat te berekenen voor dit minimum of maximum vullen we de *x*-coördinaat in, in de originele functie.
Ofwel $y = 2(-1)^2 + 4(-1) + 6$, wat *y*=4 geeft. Het maximum of minimum van deze functie ligt dus bij (-1, 4). Dit punt is een **stationair punt** van de functie *y*.

Naast de net genoemde basisregel zijn er nog een aantal regels die je nodig zal hebben om functies te kunnen differentiëren:

- **Somregel**: $h(x) = f(x) + g(x)$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = \frac{df(x)}{x} + \frac{dg(x)}{x}$
  Bijvoorbeeld: $h(x) = -3x^2 + 2x$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = -6x + 2$

- **Productregel**: $h(x) = f(x) * g(x)$ geeft $\frac{dh(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} * g(x) + \frac{dg(x)}{dx} * f(x)$
  Bijvoorbeeld $h(x) = (x^2 + 2)(2x - 4)$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = 2x(2x - 4) + 2(x^2 + 2)$

- **Quotiëntregel**: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = \frac{g(x)*\frac{df(x)}{x} - f(x)*\frac{dg(x)}{x}}{[g(x)]^2}$.
  (Ezelsbruggetje: **n**oemer * **a**fgeleide **t**eller – **t**eller * **a**fgeleide **n**oemer / **n**oemer**^2**
  → $\frac{n \cdot at - t \cdot an}{n^2}$
  Bijvoorbeeld: $h(x) = \frac{2x-5}{x-5}$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = \frac{2(x-5)-1(2x-5)}{(x-5)^2}$

- **Kettingregel**: $h(x) = f(g(x))$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = \frac{df(x)}{x} * g(x) * \frac{dg(x)}{x}$
  Bijvoorbeeld $h(x) = (4x - 3)^2$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = 2 * (4x - 3)^{2-1} * 4$

  Simpel gezegd neem je hier eerst de afgeleide van de buitenste functie (in dit geval is dat het kwadraat), dat vermenigvuldig je met de binnenste functie (hier is dat: *4x-3*). Ten slotte vermenigvuldig je het geheel met de afgeleide van de binnenste functie.

Naast deze regels moet je ook in staat zijn om exponentiële en logaritmische functies te kunnen differentiëren. Hier zijn ook een aantal regels voor:

- $h(x) = g^x$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = g^x * \ln(g)$
- $h(x) = e^x$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = e^x$
- $h(x) = \ln(x)$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = \frac{1}{x}$
- $h(x) = \log_g x$ geeft $\frac{dh(x)}{x} = \frac{1}{x * \ln(g)}$

Soms moet je bij het differentiëren van deze functies ook de kettingregel gebruiken om de afgeleide te bepalen. $h(x) = e^{2x}$ geeft namelijk $\frac{dh(x)}{x} = e^{2x} * 2$

Bij het differentiëren van functies is het ten slotte handig om te onthouden dat $\frac{1}{x} = x^{-1}$ en dat $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Week 2

Optimaliseren van functies met één variabele

Eerder in deze samenvatting is uitgelegd dat door de vergelijking: afgeleide=0 op te lossen achterhaald kan worden bij welke coördinaten er sprake is van een stationair punt.
Om sneller te kunnen zien of we te maken hebben met een minimum of maximum, kunnen we de **tweede afgeleide** van een functie gebruiken.
Deze tweede afgeleide bereken je door de eerste afgeleide te differentiëren, eigenlijk differentieer je de originele functie dus tweemaal. Vandaar dat deze tweede afgeleide ook wel wordt aangeduid met 2 apostroffen in plaats van 1 (bijvoorbeeld y'').

Een voorbeeld van hoe je met de tweede afgeleide kan zien met wat voor stationair punt we te maken hebben (ofwel hoe je de functie kan **optimaliseren**):
$y = 4x^3 - 6x^2 + 2$ geeft $y' = 12x^2 - 12x$

Deze afgeleide kunnen we ontbinden in factoren, dan krijgen we $12x(x-1) = 0$.
$12x = 0$ ofwel $x - 1 = 0$
$x = 0$ of $x = 1$

Met de tweede afgeleide kunnen we nu zien wat voor stationair punt er precies is bij de verschillende x-coördinaten. De tweede afgeleide berekenen we zoals gezegd door de eerste afgeleide te differentiëren.
$y' = 12x^2 - 12x$ geeft $y'' = 24x - 12$

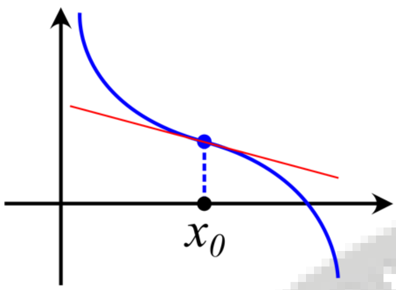
Nu vullen we beide eerder gevonden x-coördinaten in in de tweede afgeleide:
$x(0)$ geeft $24 * 0 - 12 = -12$. De tweede afgeleide is dus negatief. Bij $x(0)$ kunnen we daarom stellen dat de functie de neiging heeft om te dalen (de tweede afgeleide is immers negatief) en daarom is er hier sprake van een maximum.

$x(1)$ geeft $24 * 1 - 12 = 12$. De tweede afgeleide is positief, en daarom heeft de functie bij $x(1)$ de neiging om te stijgen en daarom is er hier sprake van een minimum.

Als de tweede afgeleide van een functie kleiner is dan 0 op een bepaald interval, is de functie **concaaf** op dat interval. Als de tweede afgeleide groter is dan 0 op een bepaald interval, is de functie **convex** op dat interval.

Kortom; als de tweede afgeleide negatief is, is er sprake van een maximum. Bij een positieve tweede afgeleide is er sprake van een minimum.

Echter kan het ook voorkomen dat de tweede afgeleide gelijk is aan 0. In deze situatie heeft de functie een **buigpunt** bij dat bepaalde x-coördinaat. Een buigpunt van een functie ziet er zo uit:



Bij punt x_0 is er sprake van een buigpunt. Op dit punt verandert de functie van aard. Dat wil zeggen dat de vorm van de functie verandert van hol naar bol. Een buigpunt is ook een stationair punt. In tegenstelling tot minima en maxima is een buigpunt echter geen **extreme waarde**.

In de economie kan het zijn dat de eenheden waarin de variabelen worden gemeten veranderen. Zo kan de vraag naar appels worden geschat op $Q = 50 - 2p$, met p in euro's. Echter als we de eenheid prijs veranderen, bijvoorbeeld naar dollars, zouden we de ook moeten aangeven in welke eenheid de onafhankelijk variabele wordt gemeten. Dit kan worden verholpen door een functie te maken die de relatieve (proportionele) veranderingssnelheid aangeeft, ofwel de prijs stijgt met een bepaald percentage, hoeveel procent stijgt de vraag? Dit is de **elasticiteit va neen functie**. De functie van f(x) met x>0 kan worden herschreven naar de elasticiteit: $\epsilon_x f(x) = f'(x) * \frac{x}{f(x)}$

Week 3

Integreren

In het eerste college is uitgebreid het concept van differentiëren behandeld. In de economie kan het ook nuttig zijn om het tegenovergestelde van differentiëren te doen met een functie. Dit proces heet **integreren** **(of primitiveren)**. Integreren is dus het vinden van de functie F die de **integraal** is van de functie *f*. Omdat integreren en differentiëren het tegenovergestelde zijn, is de afgeleide van de functie F gelijk aan de oorspronkelijke functie *f*. Een integraal wordt ook wel eens aangeduid met de naam **primitieve**.

De basisregels voor integreren zijn:

- $f(x) = x^a$ geeft $\int(x)dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ geeft $\int(x)dx = \ln(x) + C$
- $f(x) = e^x$ geeft $\int(x)dx = e^x + C$

De *dx* die voor alle integralen staat geeft aan dat we integreren naar de variabele *x*. De *C* achter alle integralen staat voor de **constante**.

Het is namelijk zo dat er meerdere functies *F* bestaan, waarvan de afgeleide gelijk is aan *f*. Alle mogelijke constanten die aan het eind kunnen worden gezet (bijvoorbeeld het getal 2) zullen namelijk wegvallen als je deze differentieert. Die constante kan dus allerlei waarden aannemen zodat $F' = f$.
Omdat er dus meerdere mogelijke functies F zijn is het beste wat we kunnen doen die constante er gewoon achter zetten. Op de constante na zijn alle delen van F wel uniek zodat $F' = f$. Zo'n functie F met een constante erachter heet een **onbepaalde integraal** van *f*.

Met alleen deze basisregels zal je echter niet in staat zijn om alle mogelijke functies te differentiëren. Voor ingewikkeldere functies kunnen we de kettingregel gebruiken, die bij het differentiëren wordt gebruikt.
Om de primitieve van een gegeven functie te bepalen, moeten we rekening houden met het feit dat de afgeleide van de primitieve misschien de kettingregel gebruikt.
We noemen dit de **substitutiemethode**.

Een voorbeeld:
$\int 6x(x^2+1)^5\, dx$.

De integraal van deze functie is niet te bepalen met de basisregels die net genoemd zijn. Om deze functie te differentiëren moeten we namelijk gebruik maken van de kettingregel. Echter, als we een geheel nieuwe variabele verzinnen hoeven we geen rekening meer te houden met de kettingregel en wordt het integreren een stuk makkelijker.

Stel, we verzinnen een nieuwe variabele *u* en stellen deze gelijk aan $x^2 + 1$. We hebben $x^2 + 1$ nu **gesubstitueerd** met *u*.

Hiermee krijgen we $\int 6x(\mathrm{u})^5\, dx$. Dat ziet er al iets beter uit. Echter staan er nu twee variabelen in onze functie en dat is niet de bedoeling.

We zullen *6x* nu zo moeten herschrijven dat we de variabele *x* kunnen vervangen met onze nieuwe variabele *u*.
Laten we de functie eens herschrijven tot $\int 3(\mathrm{u})^5 * 2x\, dx$. Aangezien $2\mathrm{x} * 3 = 6\mathrm{x}$ staat er nog steeds dezelfde functie.

Als we in ons achterhoofd houden dat *u* gelijk is aan $2\mathrm{x} + 1$, kunnen we opmerken dat de afgeleide hiervan gelijk is aan 2x.

Aan het einde van de functie staat dus eigenlijk de afgeleide van onze variabele en daarom mogen we $2x\, dx$ gelijkstellen aan $d(x^2 + 1)$. De afgeleide van wat er tussen haakjes staat is immers 2x.

Wat nu opvalt is dat hetgeen dat tussen haakjes staat ook nog eens gelijk is aan onze variabele *u*.
De functie is daarom nu gelijk aan $\int 3(\mathrm{u})^5\, du$.

Met du bedoelen we eigenlijk de afgeleide van onze variabele u, die dus gelijk is aan 2x. Nu is een functie ontstaan die goed te integreren is met de basisregels.

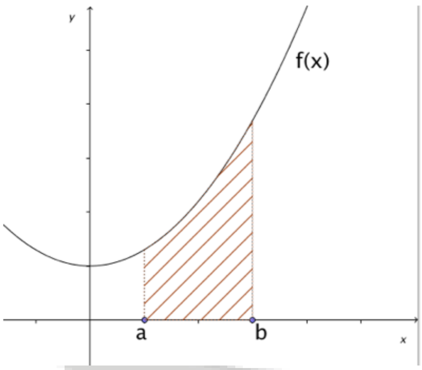
$\int 3(\mathrm{u})^5\, du$ geeft $\mathrm{F} = \frac{3}{6}u^6 + C$.
Aangezien differentiëren en integreren tegengestelde acties zijn heffen deze elkaar op. Als we du, een afgeleide, willen integreren vervalt deze daarom.

$\mathrm{F} = \frac{3}{6}u^6 + C$ is nog te herleiden tot $\mathrm{F} = \frac{1}{2}u^6 + C$,
en daarom is $\int 6x(x^2+1)^5\, dx$ gelijk aan $\frac{1}{2}u^6 + C$.

De allerlaatste stap is om $x^2 + 1$ nog terug te substitueren met u.

Dit wordt $\frac{1}{2}(x^2+1)^6 + C$. Dit kan nog herleid worden naar het eindantwoord.

Naast onbepaalde integralen zijn er ook **bepaalde integralen**. Deze kan je gebruiken om de oppervlakte van een gebied onder een functie te berekenen.



Kijk naar de functie *f(x)* in de afbeelding hierboven. Het gearceerde gebied onder de functie f(x), vanaf x=a tot x=b wordt berekend door eerst de primitieve functie *F(x)* die bij functie *f(x)* hoort te vinden. Deze bepaalde integraal wordt aangeduid met $\int_a^b f(x)dx$.

Hiermee bereken je de oppervlakte van het gebied als volgt: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Een voorbeeld: we berekenen hier deze bepaalde integraal: $\int_4^8 \frac{1}{x^3}dx$
Eerst integreren we de functie $f(x) = \frac{1}{x^3}$, deze kan herschreven worden naar $f(x) = x^{-3}$.
Met behulp van de eerste basisregel wordt de primitieve van deze functie $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$
De bepaalde integraal bereken je nu door $F(x) = -\frac{1}{2(8)^2}$ minus $F(x) = -\frac{1}{2(4)^2}$, ofwel $F(x) = -\frac{1}{2(8)^2} + \frac{1}{2(4)^2} = \frac{3}{128}$.

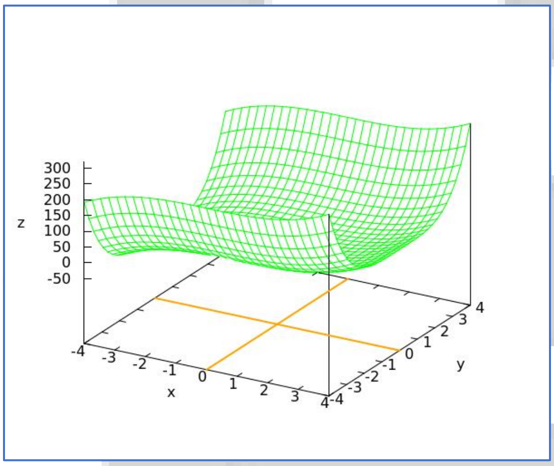
Week 4

Bivariate functies

Tot nu toe zijn enkel functies behandeld met één variabele erin, maar in de economie zijn genoeg voorbeelden te bedenken waarbij we functies gebruiken met twee variabelen erin.

Een voorbeeld hiervan is de productiefunctie $y(L, K)$ met output *y* als afhankelijke variabele heeft niet één, maar twee onafhankelijke variabelen, namelijk *L*(arbeid) en *K*(kapitaal).

Omdat zo'n functie meer variabelen heeft dan de functies die eerder behandeld zijn, is het hier niet mogelijk om alle variabelen te visualiseren in een assenstelsel. De net genoemde productiefunctie zou in zo'n 3D-diagram uitgezet worden:



Meestal is het echter zo dat één variabele constant gehouden wordt, op die manier is het wel mogelijk om op de gebruikelijke wijze een functie te tekenen.

Laten we nogmaals naar de eerdergenoemde productiefunctie kijken: $y(L, K)$.
In de economie kan het handig zijn om te weten of (en met hoeveel) een bedrijf kan groeien als het haar gebruik van arbeid ofwel kapitaal verhoogt.
Dit kunnen we controleren door de **homogeniteit** van de functie te berekenen.

Een voorbeeld met de functie $y(L, K) = L^{0,5} + K^{0,5}$
$y(L, K) = L^{0,5} + K^{0,5}$ is een voorbeeld van een **Cobb-Douglas productiefunctie**.
We kunnen de homogeniteit achterhalen door de variabelen in de functie te vervangen met *tL* en *tK*.
Nu krijgen we dus $y(L, K) = (tL)^{0,5} + (tK)^{0,5}$. Als we deze functie herschrijven kunnen we de homogeniteit bepalen.
$y(L, K) = (tL)^{0,5} + (tK)^{0,5}$ =
$y(L, K) = t^{0,5}L^{0,5} + t^{0,5}K^{0,5}$ =
$y(L, K) = t^{1} * L^{0,5} + K^{0,5}$

Omdat de functie te herschrijven was tot de vorm $t^n * y(L, K)$, is de functie daadwerkelijk homogeen. De **mate van homogeniteit** bepalen we door naar de macht van t te kijken. Aangezien deze gelijk is aan 1, is de functie homogeen van graad 1.

Met betrekking tot schaalvoordelen in de economie met homogene functies gelden de volgende vuistregels:

- er zijn constante schaalvoordelen als de functie homogeen is van graad 1.
- er zijn afnemende schaalvoordelen als de functie homogeen is van graad < 1.
- er zijn toenemende schaalvoordelen als de functie homogeen is van graad > 1.

Partieel en impliciet differentiëren

Ook bij dit soort **bivariate functies** is het soms noodzakelijk om een stationair punt te bepalen. Hiervoor moet je dus ook dit soort functies kunnen differentiëren. Vaak gebeurt dit door middel van **partieel differentiëren**. Het zit al een beetje in de naam, maar bij partieel differentiëren houden we ons slechts bezig met één van de variabelen. De andere variabele(n) beschouwen we als een constante.

Er bestaan veel notaties voor **partiële afgeleiden**, maar veelvoorkomende zijn (voor de functie $f(x,y)$):

- f_x en f_y , voor de partiële afgeleide naar respectievelijk *x* en *y*.
- $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}$ en $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}$, voor de partiële afgeleide naar respectievelijk *x* en *y*.

Een voorbeeld:

$f(x,y) = 4x^2y^3 + 2x$

$f_x = 8xy^3 + 2$ en $f_y = 12x^2y^2$

Ook bij partieel differentiëren nemen we regelmatig de tweede afgeleide. Deze worden vaak aangeduid met f_{xx} en f_{yy}. Ofwel twee keer naar x afleiden, of 2 keer naar y afleiden. In ons eerdere voorbeeld zouden dit de tweede partiële afgeleiden worden:

$f_{xx} = 8y^3$ en $f_{yy} = 24x^2y$

Ook zou je de functie kunnen afleiden naar x en daarna naar y (f_{xy}) of andersom (f_{yx}). Deze zouden altijd aan elkaar gelijk moeten zijn.

Deze technieken van het partieel differentiëren kunnen ook gebruikt worden om **impliciet** te **differentiëren**.

Eerder hadden we het over hoe ingewikkeld het kan zijn om bivariate functies in 3D-grafieken te weergeven.

Het is zoals gezegd wel zo dat een bivariate functie makkelijker getekend kan worden in een assenstelsel als één van de variabelen constant wordt gehouden.

Neem bijvoorbeeld de functie $f(x,y)$.

We kunnen hier bijvoorbeeld de variabele *f* als een constant definiëren.

Nu is het mogelijk om de relatie tussen *x* en *y* te visualiseren op een zogenoemde **iso-curve** (dit ziet er net zo uit als een 'gewone' functie).

Met zo'n curve wordt de relatie tussen *x* en *y* dus impliciet gedefinieerd.

Maar wat als we de afgeleide van de functie langs de iso-curve willen weten? Er staan nog steeds twee variabelen in en daarom kunnen we niet precies op de 'normale' wijze differentiëren.
De afgeleide van zo'n functie bepaal je door impliciet te differentiëren.

Bij de functie $f(x,y)$ wordt de impliciete afgeleide gegeven door: $-\frac{f'_x}{f'_y}$.

Financiële rekenkunde

Bij het rekenen met rente (-percentages) zijn er een viertal formules waarmee je moet kunnen werken:

- $S_t = S_0\left(1+\frac{r}{periode}\right)^t$ (= compound = rente op rente)
- $S_0 = \frac{S_t}{1(1+r)^t}$

En dezelfde formules in het geval van continue renteberekening:

- $S_t = S_0 e^{r\frac{t}{periode}}$
- $S_0 = S_t e^{-rt}$

Hierbij is S_0 het beginbedrag, S_t het eindbedrag.
R staat voor het rentepercentage en *t* voor het aantal perioden (maanden, jaren etc.)

Soms moet je rekenen met reeksen bij opgaven, bijvoorbeeld als er niet alleen elk jaar rente uitgekeerd wordt, maar er ook sprake is van een bepaalde vorm van constante winst per periode. In zulke situaties maken we gebruik van **meetkundige reeksen**.

De standaard meetkundige reeks heeft deze vorm: $a + ak + ak^2$ ... net zolang tot deze stopt.

De formule voor het berekenen van de uitkomst van zo'n reeks is: $SM = a\frac{1-(k)^n}{1-k}$
Waar *SM* = som, *a* = jaarlijkse opbrengst, *k* = verwachte toename en *n* = aantal perioden.

Zo'n meetkundige reeks kan ook oneindig veel termen bevatten. In dat geval is de formule van de eindwaarde: $SM = \frac{a}{1-k}$

Week 5

Optimaliseren van functies met meerdere variabelen

In week 2 is behandeld hoe je van functies met één variabele een minimum, een maximum (en een buigpunt) kan vinden door middel van differentiëren. Bij een stationair punt is de afgeleide van de functie gelijk aan 0.
Bij functies met twee of meer variabelen is echter geen afgeleide voor de hele functie te bepalen, en dus moeten we hierbij gebruikmaken van partieel differentiëren om stationaire punten te vinden.

Hier geldt een soortgelijke regel: stel de functie $f(x, y)$ met twee variabelen. Een bepaald punt op die functie is een stationair punt als alle partiële afgeleiden (dus f_x en f_y) op dat punt gelijk zijn aan 0.

De oplossing van dit stelsel vergelijkingen geeft dus de stationaire punten van de functie $f(x, y)$:

$$f_x(x, y) = 0$$
$$f_y(x, y) = 0$$

Het gegeven dat alle partiële afgeleiden gelijk zijn aan 0 bij minima of maxima is een **eerste orde noodzakelijke voorwaarde**, maar dat wil niet zeggen dat alle stationaire punten minima of maxima zijn.
Er kan ook sprake zijn van een **zadelpunt**. Dit is een soort driedimensionale weergave van een buigpunt.

Om te kunnen bepalen met wat voor stationair punt we te maken hebben kunnen we ook hier gebruik maken van tweede afgeleiden.
Om stationaire punten te **classificeren** van bivariate functies moeten we wel een extra voorwaarde introduceren die **gemengde partiële afgeleiden** bevat.
Ook maken we hierbij gebruik van een functie genaamd de **Hessiaan**.

Een voorbeeld van hoe de Hessiaan in zijn werk gaat:
De Hessiaan van de functie $f(x, y)$ bestaat uit de volgende onderdelen:
$$H(x, y) = f_{xx} * f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$$

f_{xy} is de gemengde partiële afgeleide die net voorbij kwam.
Deze bepalen we door f_x te differentiëren naar *y*.

Neem bijvoorbeeld $f_x = 2xy^3$.
f_{xy} wordt nu $2x * 3y^2 = 6x * y^2$ als we naar *y* differentiëren.

Dan nu de vuistregels voor classificatie van stationaire punten met de Hessiaan.

Vul eerst de gevonden coördinaten van het stationaire punt(en) in de Hessiaan in en volg daarna de vuistregels:

- Bij een positieve uitkomst van de Hessiaanfunctie en een positieve f_{xx}, is er sprake van een minimum.
- Bij een positieve uitkomst van de Hessiaanfunctie en een negatieve f_{xx}, is er sprake van een maximum.
- Bij een negatieve uitkomst van de Hessiaanfunctie is er sprake van een zadelpunt.

Week 6

In week 4 worden homogene functies behandeld. Dit concept wordt daar uitgelegd met de Cobb-Douglas productiefunctie $y(L,K) = L^{0,5} + K^{0,5}$.
In deze week wordt behandeld hoe het maximum of minimum van de functie te vinden is onder een bepaalde beperking (bijvoorbeeld een maximum aan kosten dat besteed mag worden). Dit proces heet het **optimaliseren van een functie**.

Er zijn twee manieren om dit te doen: de **substitutiemethode** en de **methode van Lagrange**.
Beide zullen worden uitgelegd d.m.v. een voorbeeld.

Optimaliseren met de substitutiemethode

We nemen de productiefunctie $C = 10K^{0,5} + 10L^{0,5}$.
De beperking is dat $10K^{0,5} * L^{0,5}$ gelijk moet zijn aan 800. Hoe vinden we het minimum?

Je zult zien dat de methode met het partieel differentiëren die eerder is uitgelegd hier niet zal werken.
Daarom gaan we van de productiefunctie een univariate functie maken (functie met één variabele) maken met behulp van de beperking.
Dat doen we door K uit te drukken in L met de beperkingsfunctie:

$10K^{0,5} * L^{0,5} = 800$
$K^{0,5} * L^{0,5} = 80$
$K * L = 80^2$
$K = \frac{80^2}{L}$ ofwel $K = 80^2 * L^{-1}$

Nu substitueren we $80^2 * L^{-1}$ met K in de productiefunctie:
$C = 10 * (80^2 * L^{-1}) + 10L$

Nu hebben we een univariate functie die we kunnen differentiëren om het minimum te vinden, net zoals we gewend zijn:

$C' = 10 * 80^2 * -L^{-2} + 10$
Deze afgeleide stellen we nu gelijk aan 0 en we lossen deze vergelijking op:
$10 * 80^2 * -L^{-2} + 10 = 0$
$10 * 80^2 * -L^{-2} = -10$
$-\frac{10*80^2}{L^2} = -10$
$\frac{1*80^2}{L^2} = 1$
$L = 80$

Nu weten we dat $L = 80$ in het minimum van de productiefunctie die voldoet aan de beperking.
K vinden we door de 80 in L in de beperkingsfunctie in te vullen:
$10K^{0,5} * 80^{0,5} = 800$
$K^{0,5} * 80^{0,5} = 80$
$K = 80$

Dus K=80 en L=80 in het minimum van de productiefunctie die voldoet aan de beperking.

Optimaliseren met de methode van Lagrange

De productiefunctie in het voorbeeld net was goed te optimaliseren met de gegeven productiefunctie, aangezien beide machten in de functie gelijk waren aan 0,5.
Dit zal lang niet altijd het geval zijn, daarom is er een andere methode om ingewikkeldere functies te optimaliseren: de methode van Lagrange. Hieronder wederom een voorbeeld:

De productiefunctie is $P = 10 * L^{0,6}K^{0,4}$ met L=arbeid en K=kapitaal. Een eenheid L kost €30, een eenheid kapitaal €60.
Het budget is gelijk aan €25000. Hoe vinden we hier de maximale productieaantallen voor L en K?

Eerst moeten we de beperkingsfunctie (B) zelf opstellen.
Met de gegevens die we hebben wordt die: $25000 = 30L + 60K$ (de hoeveelheid L en K samen keer de prijs moet €25000 zijn)

Deze beperking is te herleiden tot $0 = 30L + 60K - 25000$, wat later van pas zal komen.

Vervolgens stellen we de **Lagrangiaan** op van deze functie. Uit deze formule kunnen we de maximale waarden voor K en L halen onder de beperking.

De algemene vorm van een Lagrangiaan (L) is: $L(x, y, \lambda) = P - \lambda * (B)$
De λ(labda) in de functie staat voor de Lagrange- λ, een variabele die te maken heeft met de verandering van de optimale waarden van de productiefunctie als de beperking verandert. P is de functie en B is de beperking.

De Lagrangiaan in dit voorbeeld is dus:
$L(x, y, \lambda) = 10 * L^{0,6}K^{0,4} - \lambda * (30L + 60K - 25000)$.

De volgende stap is om de partiele afgeleiden van *K, L* en λ te vinden:
$L_K = 4 * L^{0,6}K^{-0,6} - \lambda(60)$
$L_L = 6 * L^{-0,4}K^{0,4} - \lambda(30)$
$L_\lambda = 30L + 60K - 25000$

Hierbij stel je alle afgeleiden gelijk aan 0. De oplossing van dit stelsel vergelijkingen geeft de optimale waarden voor *K* en *L*.

Merk op dat $2\left(6 * L^{-0,4}K^{0,4} - \lambda(30)\right) = 12 * L^{-0,4}K^{0,4} - \lambda(60)$

We hebben nu het volgende stelsel van vergelijkingen:
$4 * L^{0,6}K^{-0,6} - \lambda(60) = 0$
$12 * L^{-0,4}K^{0,4} - \lambda(60) = 0$
$30L + 60K - 25000 = 0$

Doordat we net de gehele functie $L_L * 2$ hebben gedaan, hebben beide vergelijkingen nu hetzelfde einde ($-\lambda(60)$). Die Lagrange- λ mogen we daarom wegstrepen in beide vergelijkingen:

$$4 * L^{0,6}K^{-0,6} = 0$$
$$12 * L^{-0,4}K^{0,4} = 0$$

Om de oplossing van het stelsel te vinden is het handig om beide functies aan elkaar gelijk te stellen:

$4 * L^{0,6}K^{-0,6} = 12 * L^{-0,4}K^{0,4}$ ofwel $\frac{4 * L^{0,6}}{K^{0,6}} = \frac{12 * K^{0,4}}{L^{0,4}}$.

Kruislings vermenigvuldigen geeft $4 * L^{0,6} * L^{0,4} = 12 * K^{0,4} * K^{0,6}$

Dat is gelijk aan $4L = 12K$, ofwel $L = 3K$ en $K = \frac{1}{3}L$

De productie is dus maximaal onder de beperking bij $L = 3K$ en $K = \frac{1}{3}L$. Een van deze variabelen kunnen we nu substitueren in de derde functie:

$$30(3K) + 60K - 25000 = 0$$
$$960K = 25000$$
$$K = \frac{500}{3}$$

Als L gelijk is aan 3K, is L $3 * \left(\frac{500}{3}\right) = 500$.

De productie is dus maximaal onder de beperking bij $K = \frac{500}{3}$ en $L = 500$

Tenslotte kunnen we nog de waarde van de Lagrange- λ vinden door de waarden van *L* en *K* in te vullen in één van de partiële afgeleiden en die vergelijking op te lossen:

$$6 * 500^{-0,4} * (\frac{500}{3})^{0,4} - \lambda(30) = 0$$
$$6 * \frac{1}{500^{0,4}} * \frac{500^{0,4}}{3^{0,4}} = 30\lambda$$
$$6 * \frac{500^{0,4}}{1500^{0,8}} = 30\lambda$$
$$\frac{6}{3^{0,4}} = 30\lambda$$
$$\frac{6}{3^{0,4}} * \frac{1}{30} = \lambda$$
$$\frac{6}{30 * 3^{0,4}} = \lambda$$
$$\lambda = \frac{1}{5 * 3^{0,4}}$$

Week 7

Introductie matrices en stelsels lineaire vergelijkingen

Een **matrix** is eigenlijk een verzameling van getallen. Een matrix met de naam A zou er zo uit kunnen zien:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -18 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Dit is een voorbeeld van een 2x2 matrix, met 2 rijen en 2 kolommen.
Matrix A is dus een [2, 2] matrix.
Een matrix kan ook een ander aantal rijen en kolommen hebben.

De elementen van de matrix (ofwel de getallen die erin staan) duiden we aan met een subscriptie: A_{12}.
A_{12} verwijst naar het getal op de eerste rij en de tweede kolom van matrix A, in dit geval -18.

Matrices kunnen we in de wiskunde voor allerlei dingen gebruiken, maar nu focussen we ons op het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen met matrices. Daarvoor moeten we eerst een aantal basisbewerkingen van matrices toelichten:

- Optellen van matrices: twee matrices van dezelfde grootte kunnen bij elkaar opgeteld worden. Overeenkomstige elementen tel je bij elkaar op, bijvoorbeeld:
  $\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

- Matrix vermenigvuldigen met een getal: alle elementen in de matrix worden vermenigvuldigd met het desbetreffende getal, bijvoorbeeld:
  $2 * \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 18 \\ -12 & 10 \end{pmatrix}$

- **Transponeren** van een matrix: hier wissel je de rijen en kolommen om, bijvoorbeeld:
  $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

- Vermenigvuldigen van matrices: dit is iets ingewikkelder omdat eerst bepaald moet worden of de vermenigvuldiging mogelijk is.

  Matrix A en B zou je bijvoorbeeld alleen kunnen vermenigvuldigen als A evenveel rijen heeft als B kolommen heeft. Mochten A en B met elkaar te vermenigvuldigen zijn, betekent dat daarom niet dat B en A met elkaar te vermenigvuldigen zijn.
  Volgorde maakt dus uit!

  Stel A is een [3, 2] matrix en B een [2, 3] matrix, dan is vermenigvuldigen mogelijk. Omdat A 3 rijen heeft en B 3 kolommen zal de uitkomst een [3, 3] matrix zijn.

  Neem bijvoorbeeld deze matrices (A en B):
  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = C$. Als voorbeeld berekenen we het element C_{11}.

  Omdat het gaat om element C_{11}, kijken we naar de eerste rij van A, en de eerste kolom van B. Deze zetten we tegenover elkaar: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Nu mogen we de eerste elementen van beide matrices met elkaar vermenigvuldigen, hetzelfde geldt voor de tweede elementen.

De optelsom van die vermenigvuldigingen is gelijk aan C_{11}.
$C_{11} = 1 * 1 + 2 * 4 = 9$. Op deze manier kunnen de gehele matrices met elkaar vermenigvuldigd worden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$$

Inverse matrices

Nu gaan we de kennis over matrices toepassen.

Neem het volgende stelsel van vergelijkingen:
$4x - 4y = -1$
$2x + y = 4$

Dit stelsel is te schrijven als een **matrixvergelijking**:
$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Stel we noemen de eerste matrix A, de tweede x en de derde B.

Dat leidt tot deze vergelijking $A * x = B$

Als we de waarden van de matrix *x* vinden, dan hebben we ook de oplossing van het stelsel. Dit is dus het nut van matrices bij dit soort stelsels.

We kunnen *x* vervolgens uitdrukken in A en B:
$A * x = B$
$x = \frac{B}{A}$
$x = A^{-1} * B$

Als we A^{-1} vinden kunnen we die dus vermenigvuldigen met B om de oplossingen van het stelsel te krijgen. A^{-1} heet ook wel de **inverse matrix** van A.
Om de inverse matrix te achterhalen bepalen we eerst de **determinant** van onze matrix, dit getal is een soort samenvatting van de matrix.

$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
De determinant van A, $|A|$, wordt bepaald door $4 * 1 - (-)4 * 2$,
ofwel $A_{11} * A_{22} - A_{12} * A_{21}$.
De determinant van deze matrix A is dus gelijk aan 12 $(4 + 8)$.

De inverse matrix van A is gelijk aan $\frac{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}{12}$. De teller bestaat uit de matrix $\begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$

$A^{-1}$is dus gelijk aan: $\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(merk op dat we gewoon alle elementen mogen delen door 12).

De oplossing van het stelsel is dus $\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Deze vermenigvuldiging is gelijk aan: $\begin{pmatrix} \frac{1}{12} * -1 + \frac{1}{3} * 4 \\ -\frac{1}{6} * -1 + \frac{1}{3} * 4 \end{pmatrix}$ ofwel $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

De oplossing van het stelsel vergelijkingen is dus $x = \frac{5}{4}$ en $y = \frac{3}{2}$

Cramer's rule

Stelsels zijn ook op andere manieren op te lossen dan met inverse matrices. **Cramer's rule** is ook een veelgebruikte methode. Deze methode wordt uitgelegd aan de hand van dezelfde matrixvergelijking als in het vorige voorbeeld.

$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Stel we noemen de eerste matrix A, de tweede x en de derde B.

Dat leidt tot deze vergelijking $A * x = B$

Als we de waarden van de matrix *x* vinden, dan hebben we ook de oplossing van het stelsel.

We gaan zoals gezegd nu Cramer's rule gebruiken om het stelsel op te lossen.

De algemene vorm van Cramer's rule is bij $A * x = B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ als volgt:

$x = \frac{p*d-b*q}{[A]}$ en $y = \frac{q*a-p*c}{[A]}$

In het vorige voorbeeld hebben we al berekend dat $[A] = 12$

Invullen van de andere waarden van de matrices in Cramer's rule geeft:

$x = \frac{-1*1-(-)4*4}{12}$ en $y = \frac{4*4-(-)1*2}{12}$

ofwel $x = \frac{5}{4}$ en $y = \frac{3}{2}$

Determinant van [3, 3] matrices

Nu is onder andere uitgelegd hoe je de determinant moet bepalen van een [2, 2] matrix. Echter is het ook nodig om te weten hoe je die bepaalt van [3, 3] matrices.

De determinant van een [3, 3] matrix uitrekenen is niet ingewikkeld, maar kost wel even.

Neem de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

De algemene formule voor de determinant van een [3, 3] is (let op: de cijfers verwijzen naar elementen in de matrix)

: (11·22·33+12·23·31+13·21·32) – (13·22·31+12·21·33+11·23·32)

$|A|$ is dus gelijk aan: (1*-1*-1 + 2*-1*1 + 3*0*0) – (3*-1*1 + 2*0*-1 + 1*-1*0) = -1 – (-) 3 = 2

$|A| = 2$

Disclaimer